

在 Grassmann 流形上构造非相干酉空时码

符达伟, 彭立, 王利娇, 彭秋平

(华中科技大学 电信系 武汉国家光电实验室, 湖北 武汉 430074)

摘要: 研究基于 Grassmann 流形的非相干酉空时星座图的设计方法。首先定义了非相干空时码在流形上的酉矩阵框架结构; 然后在此框架约束下, 将已有的 Grassmann 流形上最优包络分布的最小 Frobenius 弦距离作为阈值, 通过设置合适的步长来改变酉矩阵中各元素的幅值和相位, 在流形上搜索最小 Frobenius 弦距离大于阈值的点, 搜索到事先设定的星座图点数, 即构成酉空时星座图。数值仿真结果表明本框架结构非相干 Grassmannian 酉空时码的性能均优于现有的其他形式非相干酉空时码的性能。

关键词: 空时码; 星座图; Grassmann 流形; 酉矩阵; 阈值

中图分类号: TN929.5

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2013)10-0100-06

Noncoherent unitary space-time design base on Grassmann manifold

FU Da-wei, PENG Li, WANG Li-jiao, PENG Qiu-ping

(Wuhan National Laboratory for Optoelectronics, Department of Electronic and Information Engineering,
Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: A novel search technique was presented for designing noncoherent unitary space-time constellation. First of all, a unitary matrix framework based on Grassmann manifold was defined. Under the constraint of this framework, a distance threshold was set by using the existing minimum Frobenius norm of optimal packing distribution on the Grassmann manifold, and the points were searched for whose minimum chordal Frobenius norm exceeds the threshold by changing the amplitude and phase of every entry in the unitary matrix. At last, the whole unitary space-time constellation with minimum chordal Frobenius norm maximum was gotten. Numerical simulations indicate that this new constellation perform better than the present codes.

Key words: space-time code; constellation; Grassmann manifold; unitary matrix; threshold

1 引言

多发射和多接收 (MIMO) 无线通信系统可分为相干通信和非相干通信 2 种方式, 与之相对应的有相干空时码 (CSTC) 和非相干空时码 (NSTC)。CSTC 已经进入了工业标准, 而 NSTC 目前仍处于研究阶段。众所周知, 相干通信需要接收端确切的知道信道状态信息, 通常采用的方法是发射端发射接收端已知的导频信号, 接收端根据接收的导频信号来估计信道状态信息。显然, 导频信号会消耗信道带宽, 信道估计会增加解调器的延迟, 这些缺陷

阻碍了相干通信在高速移动的衰落信道上的应用。非相干通信是根据非相干空时码的结构特征进行解调的, 它不需要发送导频信号, 也不必进行信道估计, 延迟较小, 有可能在未来的高速移动通信中获得应用。

NSTC 分为差分空时码^[1]和一般酉空时码^[2]。Marzetta 和 Hochwald 在 1999 年提出了非相干空时码的设计准则^[3], 并得出一个重要结论: 逼近容量限的 NSTC 具有酉矩阵的结构形式。本文主要研究一般酉空时码的结构设计。目前关于酉空时码的结构设计成果并不多, 已经发表的结构设计包括: 系

收稿日期: 2012-06-12; 修回日期: 2013-02-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61071069)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China(61071069)

统设计^[4]、正交设计^[5]和基于三角函数的酉空时星座图^[6]，这些酉空时星座图的优势是具有代数结构特征，已知一个星座点，通过计算能够得到整个星座图，缺陷是没有采用优化方法设计，不能确定性是否最优。ZHENG 等人解决了非相干通信系统的信息论问题，给出了 NSTC 的信道容量，它的另一个重要贡献是将 Grassmann 流形这一数学工具引入到 NSTC 的研究中，认为酉空时星座图的每一个星座点对应于 Grassmann 流形上的一个点，故非相干酉空时星座图的设计方法等效于在 Grassmann 流形上寻找点的最优包络 (packings) 分布^[7]。在此之后，KAMMOUN 提出了基于指数映射的 Grassmannian 酉空时码，由于涉及到指数映射，构造方法较复杂，此外，没有进行优化设计，因此性能也不是最优的^[8]。

CONWAYGE 和 HARDIN 从纯数学的角度给出了 Grassmann 流形上最优包络分布，但它没有采用 Frobenius 弦距离，而是采用其他形式的弦距离和地测距离，所搜索到的最优包络结果并不能直接成为酉空时码^[9]。文献[10]证明了 Frobenius 弦距离是设计 Grassmann 流形上非相干酉空时星座图的最佳距离度量准则，并用贪心算法搜索酉空时星座图，由于贪心算法的局部最优特征只能提供次优的搜索结果；于是提出的改进措施是采用直接设计和旋转设计，它们的特点是两阶段设计策略。本文提出改进方案不是在搜索算法上挖掘潜力，而是在信号矩阵的结构上寻找突破点，提出基于 Grassmann 流形的酉空时矩阵框架结构。算法设计的基本原理是：根据数学领域已经有的 Grassmann 流形上的最优包络研究成果，设定 Frobenius 弦距离阈值，在 Grassmann 流形上寻找满足酉空时码结构约束的酉矩阵（星座点），大于阈值的点被保留，小于阈值的点被丢弃。仿真实验表明在酉空时矩阵框架约束下，通过设置最优阈值的方法所搜索到的酉空时星座图的性能优于现有酉空时码星座图的性能。

2 系统模型和信号模型

2.1 信道模型

本文采用瑞利平坦衰落信道^[1-3]。 M 根发射天线， N 根接收天线，发射符号间隔为 T ，在一个 T 间隔内，信道衰落系数维持不变，从一个 T 间隔到另一个 T 间隔，信道衰落参数将随之改变，有些文献也称该信道为准静态瑞利衰落信道^[12]。在文献[7]

和文献[10]中分析得出：为了在高信噪比下酉空时通信可以达到信道容量，发射符号间隔 T 必须满足 $T \geq \min\{M, N\} + N$ ，当给定 M 和 N 后，非相干信道的容量会随着 T 的增加与相干信道接近；在给定 N 和 T 的条件下，为了获得最大的通信自由度，发射天线数目 M 必须满足 $M = \min\{\lfloor T/2 \rfloor, N\}$ 。设发射信号为 $X_i = \sqrt{T}F_i$ （文献[2]称 $X_i = \sqrt{T}F_i$ 为酉空时调制 (USTM)），其中， F_i 是一个 $T \times M$ 的酉矩阵。设 Y 表示接收信号矩阵，由此得到系统模型为

$$Y = \sqrt{\frac{\gamma}{M}} X_i H + W \quad (1)$$

其中， H 是 $M \times N$ 维的信道衰落系数矩阵， W 是 $T \times N$ 维的加性高斯白噪声 (AWGN) 矩阵， H 和 W 中的所有元素都是独立同分布的随机变量，服从 $CN(0,1)$ 分布， γ 代表每根接收天线处的信噪比 (SNR)，归一化系数 $\sqrt{\gamma/M}$ 能保证每根接收天线的平均信噪比是 γ 。

接收端采用最大似然解调^[2]，其解调表达式为

$$\hat{X}_{ML} = \arg \max_{X_i \in \{X_i\}_{i=1}^L} \text{Tr}(Y^\dagger X_i X_i^\dagger Y) \quad (2)$$

其中， $\text{Tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹运算， $(\cdot)^\dagger$ 表示复共轭转置。从式(2)可以看出，接收端根据发射信号星座图 $\{X_i\}_{i=1}^L$ 和接收信号 Y ，就能进行最大似然解调，不需要进行信道估计。

2.2 Grassmann 流形上的酉矩阵框架

设 $G_{T,M}$ 表示 Grassmann 流形，是 T 维复欧式空间 \mathcal{L}^T 上所有 M 维子空间的集合，它也构成一个齐次空间，与正交群的商空间 $O(T)/(O(M) \times O(T-M))$ 或酉群的商空间 $U(T)/(U(M) \times U(T-M))$ 同构，因此， $G_{T,M}$ 上所有 $T \times M$ 维的酉矩阵构成等效类，或者说 $G_{T,M}$ 可用一个酉矩阵来表示。

定义 1 (Grassmann 流形上非相干酉空时码矩阵框架)：设矩阵 $F \in G_{T,M}$ ，其中， T 表示相干时间间隔， M 表示发射天线数， $f_{ij} \in \mathcal{L}$ ($i=1, \dots, T$, $j=1, \dots, M$) 表示 F 中的元素，如果构造矩阵

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1M} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{T1} & f_{T2} & \dots & f_{TM} \end{bmatrix} \quad (3)$$

满足以下 3 个条件。

1) $F^\dagger F = I_M$, 其中, I_M 为 M 维的单位矩阵。

2) F 中元素的自由度为 $\dim_F(G_{T,M}) = M(T - M)$ 表示 F 的 TM 个复元素中有 $M(T - M)$ 个复元素是独立的, 余下 $TM - M(T - M) = M^2$ 个元素可由独立的 $M(T - M)$ 个元素确定。

3) $f_{ij} \neq 0$, $i = 1, L, T, j = 1, L, M$, 则称 F 是基于 Grassmann 流形的酉空时码矩阵框架。

如果将复元素 f_{ij} 看成广义的 QAM 调制符号, 那么式(3)的酉矩阵 F 实际上是对任意复数的调制符号 $f_{ij} \in \mathcal{L}$ 进行空时编码。由于定义 1 只给出了酉空时矩阵 F 的部分信息, 如维数 $T \times M$ 和矩阵的某种结构关系 (酉矩阵结构和元素独立约束), 但没有给出每个元素 f_{ij} 的值, 因此称 F 为发射信号星座图的矩阵框架。 $L = 2^{RT}$ 由式(3)确定的 F_l 矩阵构成 Grassmann 流形上的酉空时信号星座图 $\{F_l\}_{l=1}^L$, 编码速率为 $R = (\text{lb}L)/T$ (bit/s/Hz)。对于 F_l 中所有元素 $f_{ij} \in \mathcal{L}$ ($i = 1, L, T, j = 1, L, M$), 当 $f_{ij} \neq 0$ 时, 酉空时调制保证给出满发射; 当某个 $f_{ij} = 0$ 时, 表示第 $j \in [1, M]$ 根天线在第 $i \in [1, T]$ 个时刻没有发射信号, 发射端不能形成满发射分集。初步观察可以发现: 如果发射的酉矩阵 F 的所有元素均不为零, 那么空时码一定能达到最大分集增益和最大编码增益 (反之, 不一定成立)。因此, 本文的主要任务是在 Grassmann 流形上寻找最优分布的 $\{F_l\}_{l=1}^L$, 使所有 F_l 满足定义 1 中的 3 个条件。

2.3 距离测度

在 Grassmann 流形上寻找最优星座图 $\{F_l\}_{l=1}^L$ 的问题可以等效地描述为如下的最优包络问题: 在 T 维复欧式空间中的 L 个 M 维子空间应该怎样分布, 才能使这 M 维子空间之间相隔的距离尽可能的大。另一种等效描述方式是: 如果将每一个酉矩阵 F_l 看成 Grassmann 流形上的一个点, L 个点集合 $\{F_l\}_{l=1}^L$ 应该怎样分布才能使每个点之间的距离尽可能的大。显然, 这个优化问题涉及到距离测度, 本文采用的测度是 Frobenius 弦距离。成对矩阵 $F_\alpha, F_\beta \in \{F_l\}_{l=1}^L$ 的 Frobenius 弦距离定义为^[10]

$$d(F_\alpha, F_\beta) = \sqrt{2M - 2\text{Tr}(S_{F_\alpha^\dagger F_\beta})} \quad (4)$$

其中, $S_{F_\alpha^\dagger F_\beta}$ 表示矩阵 $F_\alpha^\dagger F_\beta$ 的奇异值构成的对角矩阵。

于是, 本文定义的最优包络问题描述如下: 给定 L, T, M , 在酉矩阵框架(3)的约束条件下,

寻找集合 $\{F_l\}_{l=1}^L \subset G_{T,M}$, 使 $\min_{\alpha, \beta \in [1, L]; \alpha \neq \beta} d(F_\alpha, F_\beta)$

尽可能得大。

在文献[9]中, 研究了 Grassmann 流形上的最优包络问题, 采用与式(4)不同的距离测度, 给出了 $L = 2 \sim 50$ 的最优包络搜索结果, 如 $L = 16$ 的最优包络给出的弦距离为 $d_c^2 = 1$ (这里 d_c 不是 Frobenius 弦距离), $L = 18$ 的最优包络构成正多边形, 边长为 $d_c = 1$, 但所得到的最优包络不能很好地充当空时码, 因为搜索到的任意 $F \in \{F_l\}_{l=1}^L$ 中, 可能存在一定数量 $f_{ij} = 0$ 的情况, 使空时码的编码增益和分集增益有所损失。文献[10]研究以 4 为测度, 利用贪心算法、直接设计和旋转设计等方法寻找 $\{F_l\}_{l=1}^L$ 的最优分布问题, 由于没有给出类似于定义 1 的框架约束条件, 所得到的最优 $\{F_l\}_{l=1}^L$ 并不是在 Grassmann 流形上的点, 并且寻找最优分布的搜索工作存在下列 2 个问题: 1) 能够搜索到 $\{F_l\}_{l=1}^L$ 的次优或最优分布, 但不一定是最优空时码, 出现与文献[9]一样的情况; 2) 在未加约束的任意范围内搜索, 可能找到最优分布, 但搜索工作的计算量相当大。本文引入满足酉矩阵条件 1)、Grassmann 流形的参数条件 2) 和空时码条件 3) 的框架约束, 不仅能找到 Grassmann 流形上的最优包络, 也能保证在满分集增益和满编码增益条件下, 搜索到距离特性最优的酉空时码星座图。

3 在 $G_{4,2}$ 上非相干酉空时码设计

3.1 在 $G_{4,2}$ 上的酉空时码矩阵框架重构

蛮力搜索式(3)的 F 矩阵是很困难的, 可以根据元素间存在的相互关系, 对 F 进行重组。重组方案有 2 种, 一种是将 F 矩阵看成 M 个列矢量, 可以在矢量空间中寻找 M 个彼此标准正交的列矢量构成的 $T \times M$ 维 F 矩阵, 并由此寻找 L 个 F 矩阵构成相应的星座图 $\{F_l\}_{l=1}^L$, 关于这个方法的论述见文献[9]; 另一种是本文讨论的将 F 矩阵按列分成 K 个子块, 即当 $T = KM$, K 为任意大于等于 2 的正整数, 要求每个分块子矩阵都是一个 $M \times M$ 的方阵, 故 F 可以表示为 $F = [F_1, F_2, \dots, F_K]^T$, $(\cdot)^T$ 表示矩阵转置。有

$$F^\dagger \cdot F = [F_1^\dagger \quad F_2^\dagger \quad \dots \quad F_K^\dagger] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_K \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^K F_k^\dagger F_k = I_M \quad (5)$$

其中，每个 $F_k^\dagger F_k (k=1, L, K)$ 都是相互独立的。这里进一步对元素的分布设置约束条件，设每个子矩阵 $F_k (k=1, L, K)$ 中元素的自由度为 $M(T-M)/K$ 。这样可将具有 $M(T-M)$ 个自由度的 $T \times M$ 维 F 矩阵的搜索问题简化为 1 个 $M \times M$ 维子矩阵的搜索问题，余下的 $K-1$ 个子矩阵采用与已搜索出来的子矩阵相似结构，其中每个子矩阵具有 $M(T-M)/K$ 个自由度。

为了便于展示本文所提出的构造星座图方法的过程和性能，给出了发射时间间隔为 $T=4$ ，发射天线和接收天线均为 2 (即 $K=2$) 条件下的星座图构造 (T 和 M 的选取满足 3.1 节中的约定，且 $T=KM$ ， K 为常数)。根据定义 1 的框架结构，本节给出 Grassmann 流形 $G_{4,2}$ 上酉空时码星座图的设计方法。根据式(5)，可将搜索自由度为 4 的 4×2 矩阵简化为搜索 2 个 2×2 子矩阵，其中每个子矩阵的自由度为 2。设 f_1 和 f_2 是自由度为 2 的一个 2×2 酉矩阵中的 2 个复元素，且 f_1 和 f_2 相互独立。如果允许每个复元素能进行乘 -1、乘 $j (= \sqrt{-1})$ 和共轭操作，那么 f_1 和 f_2 在 2×2 的酉矩阵中的分布会有许多排列方案，下面是几种排列的例子：

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(f_1, f_2) &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ -f_2^* & f_1^* \end{bmatrix}, \bar{F}_2(f_1, f_2) = \begin{bmatrix} f_1 & -f_2 \\ -f_2^* & -f_1^* \end{bmatrix}, \\ \bar{F}_3(f_1, f_2) &= \begin{bmatrix} f_1 & jf_2 \\ -f_2^* & jf_1^* \end{bmatrix}, \bar{F}_4(f_1, f_2) = \begin{bmatrix} f_1 & -jf_2 \\ -f_2^* & -jf_1^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可任取其一作为 $F_{4 \times 2}$ 矩阵的子矩阵，为了简单起见，假设取 $F_1 = \bar{F}_1$ ，那么 F_2 与 F_1 有相同的结构：

$$F_1 = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ -f_2^* & f_1^* \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} f_3 & f_4 \\ -f_4^* & f_3^* \end{bmatrix}$$

其中 f_1, f_2, f_3, f_4 相互独立。考虑对列矢量的归一化，得到 Grassmann 流形 $G_{4,2}$ 上的酉空时码矩阵框架为

$$F_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \|f_3\|^2 + \|f_4\|^2}} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ -f_2^* & f_1^* \\ f_3 & f_4 \\ -f_4^* & f_3^* \end{bmatrix} \quad (6)$$

$f_i (i=1, 2, 3, 4)$ 可以表示成幅值 A 和辐角 φ 的极坐标形式，即 $f_i = A_i e^{j\varphi_i}$ ， $i=1, 2, 3, 4$ ， j 为虚数单位。由此可得在 $T=2M=4$ 时基于 QAM 调制符号的酉空时编码矩阵

$$F_{4 \times 2} = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}} \begin{bmatrix} A_1 e^{j\varphi_1} & A_2 e^{j\varphi_2} \\ -A_2 e^{-j\varphi_2} & A_1 e^{-j\varphi_1} \\ A_3 e^{j\varphi_3} & A_4 e^{j\varphi_4} \\ -A_4 e^{-j\varphi_4} & A_3 e^{-j\varphi_3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

记式(7)为 $G_{4,2}$ 上酉空时码矩阵框架，称在该框架下构造的星座图为 $G_{4,2}$ -QAM 酉空时星座图。余下的问题是在 $G_{4,2}$ 上寻找最优包络 $\{F_i\}_{i=1}^L$ ，以便确定 A_i 和 φ_i ， $i=1, 2, 3, 4$ 。

3.2 在 $G_{4,2}$ 上酉空时星座图的优化搜索

对于 $L=16$ ， $T=2M=4$ ，构造 Grassmann 流形 $G_{4,2}$ 上最优星座图 $\{(F_{4 \times 2})_i\}_{i=1}^{16}$ 的问题等效于下列优化问题。即寻找满足矩阵框架(7)的 A_i 和 $\varphi_i (i=1, 2, 3, 4)$ ，使 $\min_{F_\alpha, F_\beta \in \{(F_{4 \times 2})_i\}_{i=1}^{16}; \alpha, \beta \in \{1, 16\}; \alpha \neq \beta} d(F_\alpha, F_\beta)$ 尽可能大。 $G_{4,2}$ 可看成 R^4 空间的一个球^[9]，由式(7)构成的酉矩阵集合是球上的点，这个球的半径是 1，球上位于直径两端的点称为对跖点，对跖点之间的距离是 2，也是球上任意两点的最远距离(即球的直径)。设 Q_F 表示 T 维复空间的 M 维子空间， Q_F^\perp 是 Q_F 的补空间，该补空间内的点也是 Grassmann 流形上的点，实际上 $F \in Q_F$ 和 $F^\perp \in Q_F^\perp$ 是 Grassmann 流形上的对跖点。

优化搜索算法描述如下：设 $\{F\}$ 表示一个空集，选择一个初始点 $(F_{4 \times 2})_1$ 放入集合 $\{F\}$ 中，计算 $(F_{4 \times 2})_1$ 的对跖点 $(F_{4 \times 2})_1^\perp$ ，将 $(F_{4 \times 2})_1^\perp$ 也放入 $\{F\}$ 中。根据式(7)构造一个 4×2 的 $(F_{4 \times 2})_i$ 矩阵，具体做法是设置变化的步长为 a ， q_i 变化的步长为 b ，由于 A_i 不能为 0 (因为 $f_{ij} \neq 0$)，所以 A_i 的取值范围为 $[a, 1]$ ， q_i 的取值范围为 $[0, 2\pi]$ 。在步长 a 和 b 的控制下，选取 4 个复数值 $f_i = A_i e^{jq_i}$ ， $i=1, 2, 3, 4$ ，构形成如式(7)的酉矩阵 $(F_{4 \times 2})_i$ ，计算 $(F_{4 \times 2})_i$ 与集合 $\{F\}$ 中所有已有星座点的 Frobenius 弦距离，如果所有距离值均大于事先确定的距离阈值 d_{th} ，那么将 $(F_{4 \times 2})_i$ 保留在集合 $\{F\}$ 中，如果所计算出的距离值中有一个小于 d_{th} ，则放弃这个 $(F_{4 \times 2})_i$ 。继续修改 A_i 和 q_i 值，生成新的 $(F_{4 \times 2})_i$ ，重复上述过程，直到集合 $\{F\}$ 中的元素个数为 $L=16$ ，则完成星座图 $\{(F_{4 \times 2})_i\}_{i=1}^{16}$ 的设计。

对上述算法有如下几点说明。

1) 初始点 $(F_{4 \times 2})_1$ 的选取可以是任意满足式(7)的酉矩阵，为简单起见，本文规定 $A_i=1$ 和 $q_i=0$ ， $i=1, 2, 3, 4$ ，即可得到 $(F_{4 \times 2})_1$ ，设它的对跖点为

$(F_{4 \times 2})_1^\perp$, $(F_{4 \times 2})_1$ 和 $(F_{4 \times 2})_1^\perp$ 中的列矢量存在彼此正交的关系, 它们的结构如下

$$(F_{4 \times 2})_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$(F_{4 \times 2})_1^\perp = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

2) 步长 a 的选择可以是 $(0,1]$ 之间的任意值, 取 $a=1/m$, m 是正整数, 步长 b 的选择可以是 $[0, 2p]$ 任意值, 取 $b=2p/n$, n 是正整数。则候选矩阵的个数为 $P_{mn}^4 = (mn)!/(mn-4)!$, 由此可以看出, m 和 n 的取值决定了上述搜索算法的复杂度。显然, 步长 a 和 b 的取值越小, 步长的倍数值 m 和 n 的取值越大, 等待候选的矩阵个数 P_{mn}^4 就越多, 搜索计算量就越大。例如, 当 $m=4$, $n=4$, $a=0.25$, $b=p/2$ 时, 候选点的数量为 $P_{mn}^4 = (16)!/(12)! = 4.368 \times 10^4$ 。上述搜索算法的一个简化方案 A_i 是: 只需搜索 7 个点, 然后求它们的对跖点。

3) 距离阈值 d_{th} 的选取根据实际情况确定。根据文献[9]提供的 Grassmann 流形 $G_{4,2}$ 上的最优包络搜索结果, 对于 $L=16$ 的最优包络, 几何弦距离的最小值为 1, 所对应的最小 Frobenius 弦距离初步估计略大于 0.8, 所以取 $d_{th} = 0.8$ 。这 16 个星座点的 Frobenius 弦距离分布如图 1 所示。在 $G_{4,2}$ -QAM 酉空时星座图集合 $\{(F_{4 \times 2})_l\}_{l=1}^{16}$ 中, 到初始点 $(F_{4 \times 2})_1$ 的 Frobenius 弦距离为 1.0824 的酉矩阵有 2 个, 弦距离为 0.808 3 的酉矩阵有 6 个, 弦距离为 1.345 0 的酉矩阵有 6 个, 弦距离为 2.0 的酉矩阵有 1 个。在这个星座图 $\{(F_{4 \times 2})_l\}_{l=1}^{16}$ 中 成对最小 Frobenius 弦距离为 0.808 3。

4 仿真与结果分析

非相干酉空时码的实际应用需要考虑与二进制信息序列之间的映射关系, 即给星座图中每一个点分配一个二进制序列作为该点的标识, 对于星座图 $\{X_l\}_{l=1}^{16}$ 需要给每个点分配 $n_b = \text{lb}(L) = 4 \text{ bit}$ 的二进制序列。由图 1 的距离分布可以看出, 星座图点之间的距离并不是一致的, 距离相近的点发生解调错误的概率较大, 若把 Frobenius 距离相近的星座图点分配汉明距离相近的二进制序列, 这显然可以改善误码性能, 这种映射规则就是准格雷映射。本文采用文献[11]中介绍的准格雷映射算法完成从二进制序列到 $G_{4,2}$ -QAM 星座图的映射。

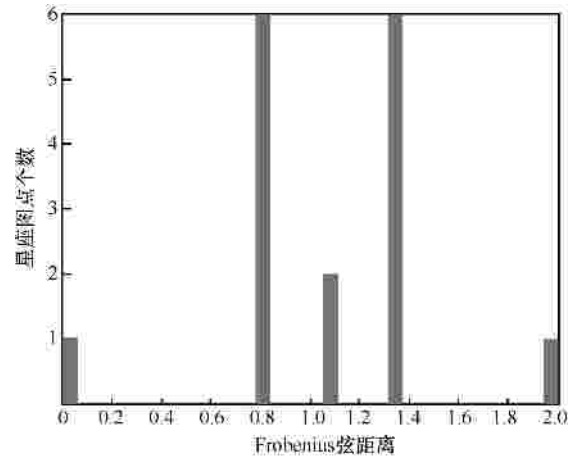


图 1 15 个 $G_{4,2}$ -QAM 酉空时码字到初始点的 Frobenius 弦距离分布

在天线数目 $M=N=2$ 、相干时间 $T=2M=4$ 和星座图尺寸 $L=16$ (或数据速率 $R=1 \text{ bit/s/Hz}$) 的条件下, 图 2 给出了本文提出的 $G_{4,2}$ -QAM 非相干酉空时码与某些现有非相干酉空时码的性能比较曲线。这些现有非相干空时码包括: 文献[4]的基于计算机搜索的系统设计酉空时码、文献[5]的正交设计的酉空时码和文献[6]的基于三角函数的酉空时码。图 2 的仿真结果表明, 在误码率为 10^{-5} 数量级时, 本文提出的方案比正交设计的酉空时码性能改善 1 dB, 比系统设计的酉空时码性能改善 2.1 dB, 比基于三角函数的酉空时码性能改善 8 dB。

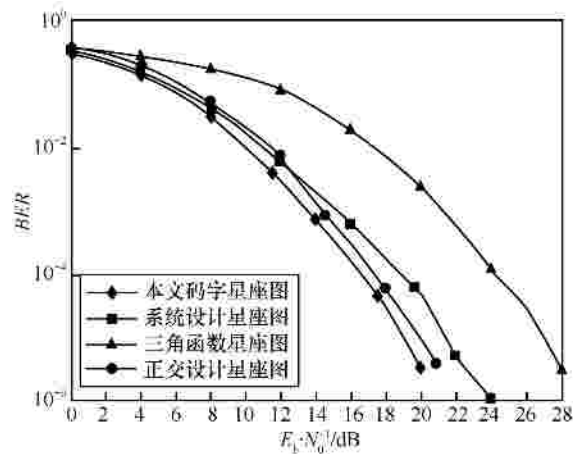


图 2 $G_{4,2}$ -QAM 空时码与某些已有酉空时码的性能比较

图 3 给出的是本文构造的酉空时码与文献[8]中同在 Grassmann 流形下用指数映射方法构成的酉空时码的性能比较, 容易看出 $G_{4,2}$ -QAM 非相干酉空时码比基于指数映射 Grassmann 酉空时码性能改善 2dB。这种性能的改善得益于在框架结构约束下 Grassmann 流形上最优包络点的搜索结果。

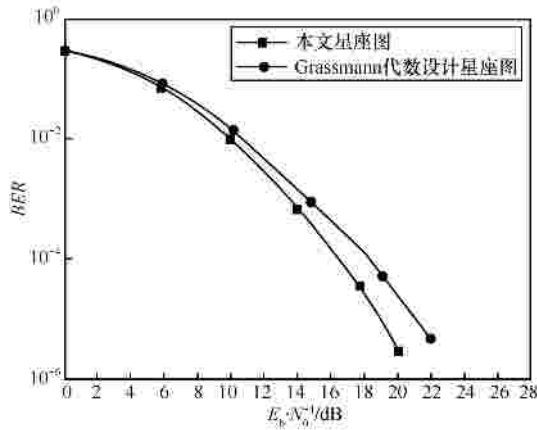


图 3 $G_{4,2}$ -QAM 空时码与基于指数映射 Grassmann 酉空时码的性能比较

图 4 是在本文设计方法基础下星座图大小分别为 16 和 32 点的星座图的性能比较，可以看到 16 点星座图码的性能优于 32 点星座图码，但其传输速率低于 32 点的酉空时码星座图，32 点星座图的编码速率为 $R = 1.25$ bit/s/Hz。

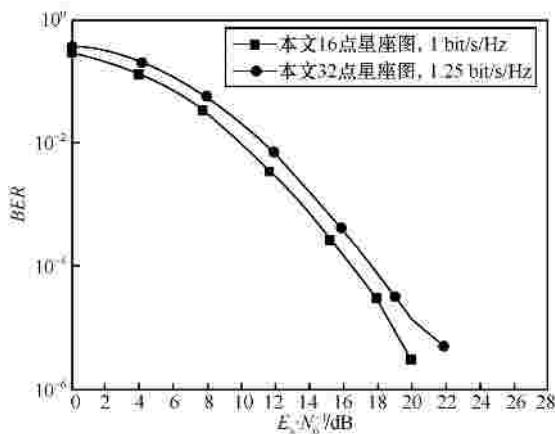


图 4 $G_{4,2}$ -QAM 空时码 16 点和 32 点星座图的性能比较

5 结束语

本文设计了一种新的具有潜在实用价值的 Grassmannian 非相干酉空时码星座图，它是目前在 Grassmann 流形上所构造出来的最优非相干酉空时码星座图，其仿真性能也优于非 Grassmann 流形上非相干酉空时码星座图的性能。用 Grassmann 流形这一数学工具来研究非相干酉空时码的理论问题的研究成果较多，但提出实用酉空时码结构的应用研究一直进展缓慢，本文所提出的酉矩阵框架结构，给出了非相干酉空时码的在 Grassmann 流形上的实用模型，并使 Grassmannian 星座图的搜索算法比现有的遍历搜索算法具有更低的计算复杂度。未来的

研究工作是构造有利于降低最大似然解调算法计算复杂度的 Grassmannian 非相干酉空时星座图。

参考文献：

- [1] TAROKH V, JAFARKNANI H. A differential detection scheme for transmit diversity[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2000, 18(7):1169-1174.
- [2] HOCHWALD B M, MARZETTA T L. Unitary space-time modulation for multiple antenna communication in Rayleigh flat fading[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2000, 46(2):543-564.
- [3] MARZETTA T L, HOCHWALD B M. Capacity of a mobile multiple-antenna communication link in Rayleigh flat fading[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1999, 45(1):139-157.
- [4] HOCHWALD B M, MARZETTA T L, RICHARDSON T J. Systematic design of unitary space-time constellations[J]. IEEE Trans Inform Theory 2000, 46(6):1962-1973.
- [5] ZHAO W, LEUS G, GIANNAKIS G B. Orthogonal design of unitary constellations for uncoded and trellis-coded noncoherent space-time systems[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2004, 50(6):1319-1327.
- [6] TAROKH V, KIM I M. Existence and construction of noncoherent unitary space time codes[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2002, 48(12): 3112-3117.
- [7] ZHENG L, TSE D N C. Communication on the Grassmann manifold: a geometric approach to the noncoherent multiple-antenna channel[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2002, 48(2):359-383.
- [8] KAMMOUN I, CIPRIANO A M, BELFIORE J C. Noncoherent codes over the Grassmannian[J]. IEEE Trans Wireless Commun, 2007, 6(10):3657- 3667.
- [9] CONWAY J H, HARDIN R H, SLOANE N J A. Packing lines, planes, etc.: packings in Grassmannian spaces[J]. Experimental Mathematics, 1996, 5(2):139-159.
- [10] GOHARY R H, DAVIDSON T N. Noncoherent MIMO communication: Grassmannian constellations and efficient detection[J]. IEEE Trans Inform Theory, Mar. 2009, 55(3):1176-1205.
- [11] COLMAN W K, GOHARY R H, EI-AZIZY M A, et al. Quasi-gray lablling for Grassmanian constellations[J]. IEEE Wireless Communications, 2011, 10(2):626-636.
- [12] KAMMOUN I, BELFIORE J C. A new family of Grassmannian space-time codes for noncoherent MIMO systems[J]. IEEE Communication Letters, 2003, 7(11):528-530.

作者简介：



符达伟（1988-），男，海南海口人，华中科技大学硕士生，主要研究方向为 MIMO 通信、调制技术与信道编码。

彭立（1962-），女，湖北武汉人，华中科技大学副教授，主要研究方向为信息论、编码与调制技术和无线传输技术。

王利娇（1988-），女，河南安阳人，华中科技大学硕士生，主要研究方向为非相干酉空时码和差分酉空时码。

彭秋平（1987-），男，湖南娄底人，华中科技大学硕士生，主要研究方向为 MIMO 通信和调制技术。